Τέταρτο τεστ Απειροστικός Λογισμός 2

Διάρκεια 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1
Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x \in [0,1] \\ -2x+6 & , \quad x \in (1,2] \\ 2x & , \quad x \in (2,3] \\ -2x+9 & , \quad x \in (3,4] \end{cases}$$

(i) Να υπολογίσετε το ανώ και το κάτω αθροίσμα $U(f,P)$ και $L(f,P)$, αντίστοιχα, της f ως προς διαμέριση $P = \{0,1,2,3,4\}$. Έπειτα, Θεωρείστε τη διαμέριση $Q = \{0,2,4\}$ και δίχως να κάνετε κάποιον υπολογισμό για το άνω και το κάτω άθροισμα, $U(f,Q)$ και $L(f,Q)$, αντίστοιχα, της f ως προς τη διαμέριση Q, να βάλετε σε μια διατεταγμένη σειρά τα $U(f,P)$, $L(f,P)$,$U(f,Q)$ και $L(f,Q)$.

(ii) Αφού πρώτα αιτιολογήσετε το λόγο για τον οποίο η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη να υπολογίσετε (με οποιοδήποτε τρόπο) το ολοκλήρωμα της f στο $[0,4]$.

Θέμα 2 (Πολλαπλής Επιλογής)
Να επιλέξετε **τις σωστές** απαντήσεις για το κάθε ερώτημα (με πλήρη αιτιολόγηση).

(i) Η ακολουθία $a_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin(nx)dx,\ n \in \mathbb{N}$

  (a) δεν έχει πεπερασμένο όριο .
  (b) έχει όριο και αυτό ισούται με 0.
  (c) έχει όριο το $+\infty$.

(ii) Έστω $f\colon [0,1] \to [0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση με $\displaystyle\int_0^1 (e^{f(x)} - 1)dx = 0$. Τότε,

  (a) υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ ώστε $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{f(x_0)}{3}$.
  (b) $\displaystyle\int_0^1 e^{f(x)-1}dx = \frac{1}{e^2}$.
  (c) υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ ώστε $f(x_0) > 0$.
  (d) $\displaystyle\int_0^1 xe^{f(x)}dx = \frac{1}{2}$.

Θέμα 3

(i) Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \displaystyle\int_2^{\ln x} \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F και αφού αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της να υπολογίσετε την παράγωγο F'.

(ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\,dx, \quad \int \frac{3x+2}{2x-1}\,dx, \quad \int_1^e [(2x+1)\ln x]\,dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+3}}\,dx$$

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!